

Equation of State

1. Die semi-empirische Birch-Murnaghan Zustandsgleichung (EOS) für den statischen Druck im Erdinnern lautet bis zur 2. Ordnung in f (f als Symbol für “finite strain”)

$$p = \frac{3}{2}K_0 \left\{ \left(\frac{V_0}{V}\right)^{7/3} - \left(\frac{V_0}{V}\right)^{5/3} \right\}, \quad \text{mit} \quad f = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{V_0}{V}\right)^{2/3} - 1 \right]$$

wobei V_0 und K_0 das Volumen bzw. Bulk Modul an der Erdoberfläche ($f \cong 0$) sind. Leiten Sie für das isotherme Bulk Modul $K_T = -V(dp/dV)_T$ im Erdmantel die Gleichung

$$K_T = K_0(1 + 7f)(1 + 2f)^{5/2}$$

ab.

Hilfestellung: vgl. Auszug aus dem Buch von Poirier dazu auf der Rückseite

4.3.2 Second-order Birch–Murnaghan equation of state

We will follow Bullen (1975) for the demonstration of the Birch–Murnaghan EOS:

Let us consider only the expansion of F to second order:

$$F \approx af^2 \tag{4.28}$$

From (4.26) and (4.27), we obtain

$$a = \frac{9}{2} K_{0T} V_0 \tag{4.29}$$

The pressure is

$$P = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T = - \left(\frac{dF}{df} \right)_T \frac{df}{dV} \tag{4.30}$$

Differentiating (4.21), we get

$$\frac{df}{dV} = - \frac{1}{3V_0} (1 + 2f)^{5/2} \tag{4.31}$$

Hence

$$P = 3K_{0T} f(1 + 2f)^{5/2} \tag{4.32}$$

Using (4.21), we can express f in terms of ρ/ρ_0 ,

$$f = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{2/3} - 1 \right] \tag{4.33}$$

and carrying it into (4.32), we obtain the second-order Birch–Murnaghan equation of state (Birch 1938, 1947):

$$P = \frac{3K_{0T}}{2} \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{7/3} - \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{5/3} \right] \tag{4.34}$$