

**Übungsaufgaben zur Vorlesung  
„Mathematik I für Geoökologen und Geowissenschaftler“**

#7

Letzter Abgabetermin: 18. 12. 2009

1. Berechnen Sie die folgenden Determinanten!

a)  $\begin{vmatrix} 2.3 & 4.5 \\ 1.9 & -1.7 \end{vmatrix}$

b)  $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 4 & 6 & -2 \end{vmatrix}$

c)  $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{vmatrix}$

(3 Punkte)

2. Zeigen Sie, dass für die Determinante der Rechts-Dreiecksmatrix  $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & r_{23} & \cdots & r_{2n} \\ 0 & 0 & r_{33} & \cdots & r_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & r_{nn} \end{pmatrix} \text{ gilt: } |R| = \prod_{i=1}^n r_{ii}.$$

(3 Punkte)

3. Berechnen Sie den Rang der Matrix  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}$  (vgl. #6,2.d)!

(1 Punkt)

4. Welche der linearen Gleichungssysteme aus #6,1. sind mit der Cramerschen Regel lösbar? Begründen Sie Ihre Antworten für a), b), c), d)!

(2 Punkte)

5. Gegeben sei die lineare Abbildung  $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  durch  $y = \varphi(x) = Ax$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -8 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad y \in \mathbb{R}^2.$$

a) Bestimmen Sie den Kern der linearen Abbildung  $\varphi$ !

b) Zeigen Sie, dass dieser Kern Trägermenge eines Unterraumes des Raumes  $\mathbb{R}^3$  ist!

c) Nun sei  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$ . Zeigen Sie, dass der Kern jeder linearen Abbildung  $y = \varphi(x) = Ax$  Trägermenge eines Unterraumes des Raumes  $\mathbb{R}^n$  ist!

(7 Punkte)

**Das Team der „Mathematik für Geoökologie und Geowissenschaften“  
wünscht Ihnen ein besinnliches Weihnachtsfest  
und einen guten Rutsch ins Neue Jahr  
sowie viel Erfolg in Ihrem Studium!**